

Ismét az ereszsarok szögének két részre osztásáról

Ez a dolgozatunk szorosan kapcsolódik több korábbihoz; ezek pl.:

~ **KD - 1.**: *Az ereszsarok szögének két részre osztása paralelogramma - szerkesztéssel;*

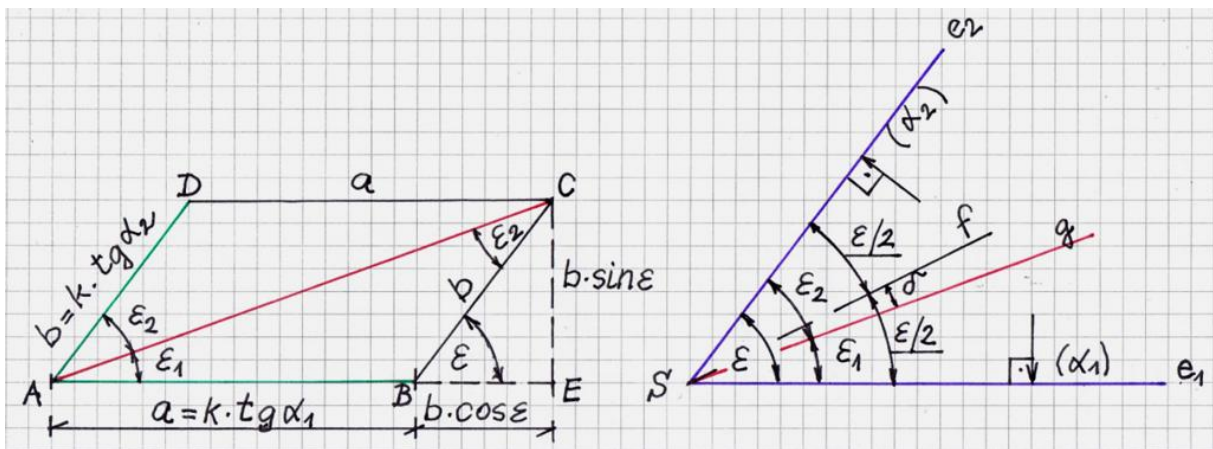
~ **KD - 2.**: *Még a paralelogrammáról;*

~ **KD - 3.**: *Még mindig a paralelogrammáról;*

~ **KD - 4.**: *Megint a fedélidom - szerkesztésről.*

Ezek az előzmények ajánlottak áttanulmányozásra, az alábbiak jobb megértéséhez.

Az történt, hogy **KD - 2.** - ben „felfedeztük”, **KD - 3** - ban pedig „élveztük”, hogy milyen szép, újabb képlet - alakok állhatnak elő, nem csak a *tangens szögfüggvény*, hanem a *tangens - tétel* – [1] – alkalmazásával, a paralelogramma adatainak számítása során. A „felfedezés” valójában nem volt más, mint egy régi mechanika - tankönyvben olvasott alkalmazása. Ez azonban igencsak újszerű volt nekünk, ráadásul meglepően hasznos - nak is bizonyult. Aztán összekapcsoltuk az újabb ismereteket a **KD - 1.** - beliekkal, így adta magát, hogy „frissítsünk”, alkalmazva a **KD - 4.** - ben is leírtakat. Most ez következik. Ehhez tekintsük az 1. ábrát!



1. ábra

Itt összefoglaltuk a főbb tudnivalókat:

~ az **S** ereszsarokban metsződő, egymással ε szöget bezáró e_1 és e_2 ereszvonalakból indulnak az α_1 és α_2 hajlású tetősíkok;

~ az ε szög felezője az **f** egyenes;

~ megszerkesztettük az ereszvonalak egyeneseseivel párhuzamos oldalú, **a** és **b** oldal - hosszúságú paralelogrammát, ahol

$$a = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1, \quad b = k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2,$$

(1)

itt k egy tetszőleges pozitív állandó (szakaszhossz);

$\sim$ a paralelogramma AC átlójával párhuzamosan S -ből indul a g félegyenes, mely a szerkesztés keresett geometriai eredménye: a két tetősík metszésvonalának alaprajzi vetülete;

$\sim$ a δ szög g - nek f - től való eltérését mutatja, azaz az 1. ábra szerint is:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} - \delta, \quad \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} + \delta. \quad (2)$$

Itt ε_1 és ε_2 a keresett matematikai végeredmények, melyek közt fennáll, hogy

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \quad (3)$$

Az 1. ábra bal oldali része alapján, (1) - gyel is írhatjuk, hogy

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{b \cdot \sin \varepsilon}{a + b \cdot \cos \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{a}{b} + \cos \varepsilon} = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon}, \quad \text{tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon_1 = \frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon}, \quad (4)$$

innen:

$$\varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin \varepsilon}{\frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\operatorname{tg} \alpha_2} + \cos \varepsilon} \right), \quad (5)$$

majd (3) - ból:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1. \quad (6)$$

Ezzel a feladatot megoldottnak is vehetjük, vettük is eddig. Azonban eredményeinket még szemléletesebbé / szebbé tehetjük, az alábbiak szerint.

Az 1. ábra ABC háromszögére alkalmazva a tangens - tételt, (3) és (6) - tal is:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon - 2 \cdot \varepsilon_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}}{\operatorname{tg} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon_1 \right)}; \quad \text{innen:}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon_1 \right) = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ebből:}$$

$$\frac{\varepsilon}{2} - \varepsilon_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \text{innen:}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} \right); \quad (7)$$

most (1) és (7) - tel:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} - \arctg\left(\frac{k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2}{k \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 + k \cdot \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} - \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ tehát:}$$

$$\underline{\varepsilon_1(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon}{2} - \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \quad (8)$$

Most (6) és (8) - cal:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \varepsilon_1 = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} + \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ tehát:}$$

$$\underline{\varepsilon_2(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\varepsilon}{2} + \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right)}. \quad (9)$$

Bevezetve a

$$\underline{\delta(\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2) = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha_1 - \operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2}\right)} \quad (10)$$

menyiséget, (8), (9) és (10) - zel visszakaptuk (2) - t.

Most vagyunk ott, hogy megállapíthatjuk: a tangens - tétel alkalmazásával nyert képletek szemléletesebbek, mint (5) és (6), mert megadják az ereszvonalak által bezárt szög felezőjéhez képest az eltérést. A (8), (9), (10) képletekből kiolvasható, hogy

$$\alpha_1 > \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 > \operatorname{tg} \alpha_2 \rightarrow \delta > 0 \rightarrow \varepsilon_1 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (11 / 1)$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \rightarrow \delta = 0 \rightarrow \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2}, \quad (11 / 2)$$

$$\alpha_1 < \alpha_2 \rightarrow \operatorname{tg} \alpha_1 < \operatorname{tg} \alpha_2 \rightarrow \delta < 0 \rightarrow \varepsilon_1 > \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11 / 3)$$

Az itt szereplő szögekre általában fennáll, hogy

$$0 < \varepsilon < 180^\circ, \quad 0 < (\alpha_1, \alpha_2) < 90^\circ. \quad (12)$$

SZÁMPÉLDA

$$\text{Adott: } \varepsilon = 120^\circ; \quad \alpha_1 = 60^\circ; \quad \alpha_2 = 45^\circ. \quad (A)$$

Keresett: $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

I. Megoldás számítással

~ a (10) képlettel és (A) - val:

$$\delta = \arctg\left(\frac{\operatorname{tg} 60^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ}{\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ} \cdot \operatorname{tg} \frac{120^\circ}{2}\right) = 24,9^\circ; \quad (a)$$

M3. A 2. ábrán a zöld színű, s_1 és s_2 jelű szakaszok a tetőt az ereszsík felett h magasságban metsző vízszintes szintsík és a tetősíkok metszésvonalának – a szintvonalnak – darabjai.

M4. Megemlítjük, hogy a (4) képlet egy paralelogrammától független térgeometriai számítás eredménye, melyet korábbi dolgozatainkban többször is levezettünk.

M5. A szükséges számolások egy egyszerűbb tudományos zsebszámológépen könnyedén elvégezhetők. Most is ajánljuk az olyan gépek használatát, melyeken „Natural Display” található, így a bevitt adatok, beírt képletek használata, ellenőrzése egyszerűbb és gyorsabb. Ne feledkezzünk meg a DEG üzemmód beállításáról!

M6. Nekünk úgy tűnik, hogy az újabb képletek nem csak szebbek, de a velük való munka is egyszerűbb, áttekinthetőbb. Tanárként ezek használatát javasolhatjuk a tanulóknak, a szerkesztés mellett, annak ellenőrzésére is. Megeshet, hogy a „tanulók” ács vagy tetőfedő mestervizsgálóra készülő szakemberek, magasépítő technikusok, esetleg mérnökök is lehetnek. Jó munkát!

Forrás:

[1] – **I. N. Bronstejn ~ K. A. Szemengyajev:** Matematikai zsebkönyv
2. kiadás, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1963., 232. o.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
mérnöktanár

Sződliget, 2018. 06. 11.